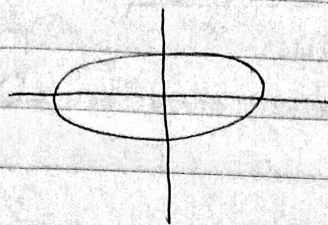


Είληψη

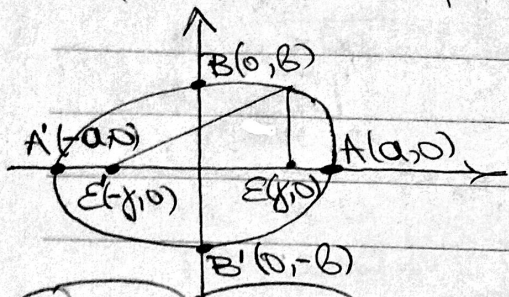
$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$$



16.5.11



Ορισμός: Είληψη ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Oxy , των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από 2 σταθερά ελκεία, είναι σταθερό.



$$|ME| + |ME'| = 2a, a > 0$$

$$\sqrt{(x-y)^2 + y^2} = -\sqrt{(x+y)^2 + y^2} + 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-y)^2 + y^2} = 4a^2 + (x+y)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+y)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow -4yx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+y)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+y)^2 + y^2} = a + \frac{y}{a}x \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - y^2} = 1$$

Όταν $a > 2y$ τότε:

$$2a > 2y \Rightarrow a > y \Rightarrow a^2 > y^2 \Rightarrow$$

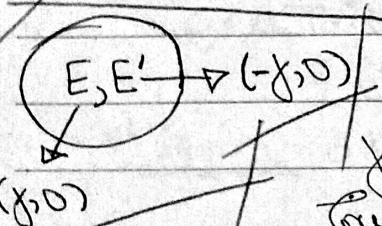
$$\text{όπου } b^2 = a^2 - y^2$$

Τα σταθερά ελκεία E, E' λέγονται ελκες και αν λ τυχόν ελκείο ελκευς, τα εδ. τμήματα $\vec{KE}, \vec{KE'}$ καλούνται ελκεές ακτίνες.

Πχ. Εστω η $4x^2 + 9y^2 = 36 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

$$b^2 = a^2 - y^2 \Rightarrow y^2 = a^2 - b^2 = 5 \Rightarrow y = \pm\sqrt{5}$$

$$E, E' \rightarrow O(0,0)$$

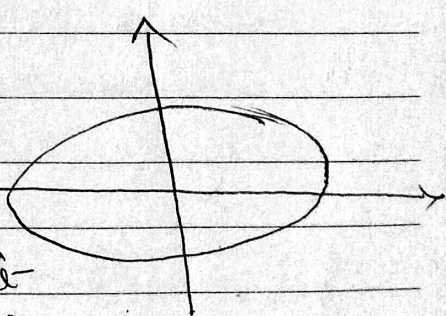


• Αν $y=0 \Rightarrow a=b \Rightarrow$ η είληψη γίνεται κύκλος. (ο κύκλος θεωρείται και εκφυλισμένη μορφή είληψης)

• Αν $E=E' \rightarrow A, A'$ αντίστοιχα.

$$(y=a) \Rightarrow b=0 \Rightarrow \text{επίεση}$$

Εκφυλισμένη μορφή είληψης.



(*) Άρα $a=3$ κ' $b=2$ οπότε $E(\sqrt{5},0), E'(-\sqrt{5},0)$

$$y^2 = 5 \Rightarrow y = \pm\sqrt{5} \quad \begin{cases} A(3,0), A'(-3,0) \\ B(0,2), B'(0,-2) \end{cases}$$

$$B(0,2), B'(0,-2)$$



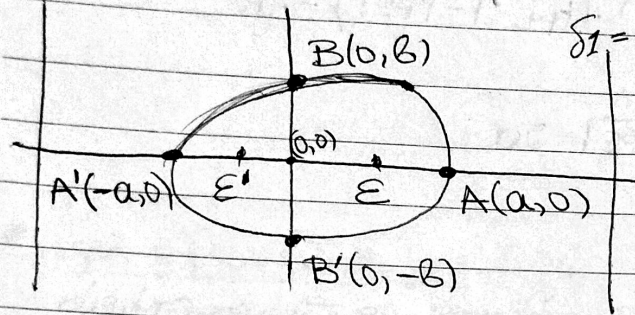


Οριζμός (Εκκεντρότητα) : Ο λόγος $\frac{|OE|}{|OK|} = e$, ορίζεται
 "Πόσο απέχει η ελλειψη L ως η εκκεντρότητα της
 από το να γίνει κύκλος;" $e = \frac{c}{a}$
 ($0 < e < 1$)

- Αν η εκκεντρότητα της ελλειψης είναι μηδέν
 δηλ. ($e=0$) $\Rightarrow$ έχουμε κύκλο
- Αν $e=1$ $\Rightarrow$ έχουμε ευθεία.

$s_2 = -\frac{a^2}{f}$

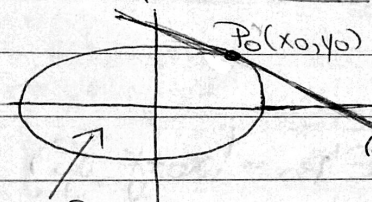
$s_1 = \frac{a^2}{f}$



Οι ευθείες $x = \pm \frac{a^2}{f}$ ορίζονται
 ως διευθετούσες της αντίστοι-
 χης ελλειψης.

* Τρόπος να οι διευθετούσες να τείνουν την ελλειψη.
 (αφού $a > f \Rightarrow \frac{a^2}{f} > a$)
 $a^2 > af \rightarrow \frac{a^2}{f}$

Εφαπτομένη ελλειψης



$x^2 + y^2 = r^2$ Εφαπτομένη
 κύκλου $x \cdot x_0 + y \cdot y_0 = r^2$
 (ε) $(x \cdot x_0 + y \cdot y_0 = r^2)$
 Γενικευμένος κανόνας $x = x_0, y = y_0$

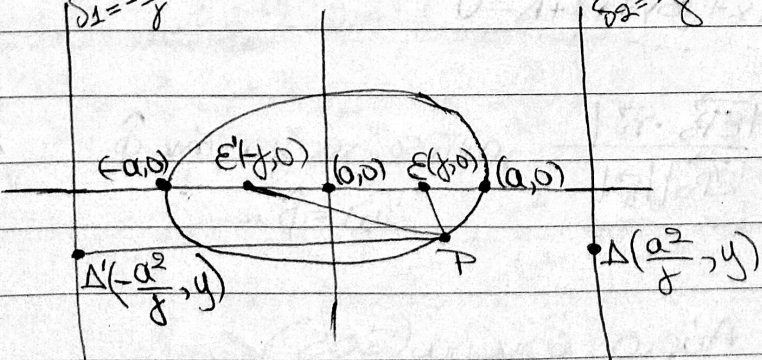
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \xrightarrow{\text{εφ.}} \boxed{\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1}$

Δείξη: Ο λόγος των αποστάσεων τυχόντος σημείου P της ελλειψης, από
 των εστιά Ε (ατίστ. Ε') και των αντίστοιχων διευθετούσες (ευθείες) είναι
 σταθερός και ίσος με την εκκεντρότητα της ελλειψης.

$s_1 = -\frac{a^2}{f}$

$s_2 = \frac{a^2}{f}$



-2-

$$\text{r\acute{o}pos αποστάσεων} = \frac{|\vec{PE}|}{|\vec{PA}|} = \frac{|\vec{PE}'|}{|\vec{PA}'|} =$$

$$|\vec{PA}'| = \sqrt{\left(x + \frac{a}{f}\right)^2 + (y - y)^2} = x + \frac{a^2}{f}$$

$$\left. \begin{aligned} |\vec{PE}'| &= \sqrt{(x+f)^2 + y^2} \rightarrow |\vec{PE}'|^2 = (x+f)^2 + y^2 \\ |\vec{PE}| &= \sqrt{(x-f)^2 + y^2} \quad |\vec{PE}|^2 = (x-f)^2 + y^2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(-)}$$

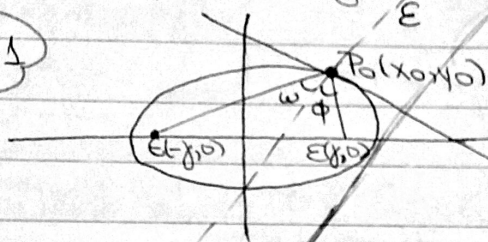
$$|\vec{PE}'|^2 - |\vec{PE}|^2 = 4fx \Rightarrow \underbrace{(|\vec{PE}'| + |\vec{PE}|)}_{2a} \cdot (|\vec{PE}'| - |\vec{PE}|) = 4fx$$

$$\Rightarrow |\vec{PE}'| - |\vec{PE}| = 2 \cdot \frac{f}{a} \cdot x \quad \text{και} \quad |\vec{PE}'| + |\vec{PE}| = 2a$$

$$\oplus |\vec{PE}'| = \left(a + \frac{f}{a} x \right) \quad \text{Ⓢ}$$

Πρόταση: Η κατεύθυνση της εφαπτομένης της ελλείψου σε τυχαίο σημείο $P_0(x_0, y_0)$ αυτής, δίνεται τη γωνία των εστιακών αυτών.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



• αν $E \perp$ στην εφαπτομένη
 $\Rightarrow \omega = \hat{\phi}$ Ⓢ

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$$

Η γωνία ω : συμπάγεται από την (E) και $\vec{E'P_0} = (x_0 + f, y_0)$

Πρέπει να προσδιορίσουμε διάνυσμα $\vec{n}$ κάθετο στην (E)

$$\rightarrow \omega = \text{γωνία}(\vec{n}, \vec{EP_0})$$

$$\text{Αλλά } (E) \perp \left(\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1 \right) \Rightarrow (E) \perp \frac{x_0}{a^2} \cdot x + \frac{y_0}{b^2} \cdot y - 1 = 0$$

$$\rightarrow (E) \parallel \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2} \right) = \vec{n}$$

$$\text{Ⓢ} \quad Ax + By + Cz + D = 0 \quad (\text{Από } 1^{\circ} \text{ κεφ.})$$

$$\text{Ⓢ} \Rightarrow \cos \omega = \frac{|\vec{EP_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{EP_0}| |\vec{n}|} \quad \text{αντίστοιχα για την } \hat{\phi}$$

$$\omega = \hat{\phi}$$

Αύριο επαιρά (5ος)